Matemática 2

Teste Intercalar

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Data: 30 de Outubro de 2019 **Duração:** 1H

Nome: ______________________________ **Número:** ______________

Questão	1	2	3	4a	4b	4c	5	Total
	20	10	25	15	10	10	10	100
Pontuação								

Atenção: Esta prova deve ser entregue ao fim de 1 Hora. Deve justificar detalhadamente todas as suas respostas. Caso necessite de espaço adicional para responder a alguma pergunta, pode utilizar o espaço disponível na última página.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Sabendo que $\lambda = 4$ é valor próprio de A, determine a constante α e a multiplicidade geométrica desse valor próprio.

Solução: Uma vez que $\lambda = 4$ é valor próprio de A, sabemos que $|A - 4I| = 0$. Ora,

$$|A-4I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4\alpha - 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(-2(4\alpha-4)-0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

A multiplicidade geométrica de $\lambda = 4$ corresponde ao número de graus de liberdade do sistema $(A - 4I)u = 0$. Prodecendo à condensação do sistema homogéneo, temos que

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deste modo, concluímos que o sistema tem um grau de liberdade (as soluções são da forma $k(0,0,1), k \in \mathbb{R}$), pelo que o valor próprio $\lambda = 4$ tem multiplicidade geométrica 1.

2. Seja $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática. Mostre que $Q(x_1, \cdots, x_n) = Q(-x_1, \cdots, -x_n)$.

Solução: Qualquer forma quadrática Q se pode escrever na forma

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Assim, temos que

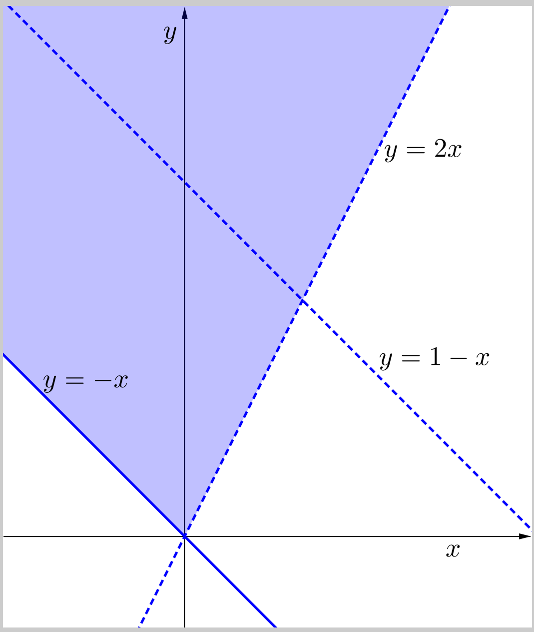
$$Q(-x_1, \cdots, -x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(-x_i)(-x_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = Q(x_1, \cdots, x_n).$$

3. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada pela expressão $f(x, y) = \dfrac{\ln(y - 2x)}{1 - \sqrt{x + y}}$.

Determine analítica e geometricamente o domínio de $\boldsymbol{f}$, D_f, e indique o seu interior, fronteira e aderência. Mostre ainda que D_f não é fechado, nem aberto, nem limitado.

Solução:

$$\begin{aligned} D_f =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2x > 0 \wedge x + y \geq 0 \wedge 1 - \sqrt{x + y} \neq 0\} \\ =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2x \wedge y \geq -x \wedge y \neq 1 - x\} \end{aligned}$$



Em geral, verifica-se $int(D_f) \subseteq D_f$, pelo que apenas pontos de D_f podem ser interiores. No entanto, neste caso, nem todos os pontos do conjunto são interiores. Concretamente, os pontos do conjunto que estão sobre a reta $y = -x$ não são interiores, porque em qualquer sua vizinhança existem pontos que não pertencem a D_f (parte dessas vizinhanças fica sempre abaixo da reta $y = -x$ e, por isso, fora do conjunto). Como nessas vizinhanças existem também sempre pontos do conjunto, eles são pontos fronteiros. Pensando nos mesmos termos acerca dos pontos sobre as semi-retas

$y = 2x, x > 0$ e $y = 1 - x, x < \frac{1}{3}$, verificamos que estes são pontos fronteiros. Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{int}(D_f) =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2x \wedge y > -x \wedge y \neq 1 - x\} \\
\operatorname{fr}(D_f) =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x \wedge y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x \wedge y \geq 0\} \\
& \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x \wedge y \geq 2x\} \\
\operatorname{ad}(D_f) =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x \wedge y \geq 2x\}.
\end{aligned}$$

Como D_f não coincide com a sua aderência (por exemplo o ponto $(0, 0)$ pertence à aderência mas não ao conjunto), não é fechado. Como D_f não coincide com o seu interior (por exemplo o ponto $(-1, 1)$ pertence ao conjunto mas não ao interior), não é aberto. O conjunto também não é limitado pois existem elementos do conjunto arbitrariamente longe da origem (por exemplo, qualquer ponto da forma $(0, M)$, $M > 1$ pertence ao conjunto), não sendo assim possível que o mesmo esteja contido numa bola $B_R(0, 0)$ para algum $R > 0$.

4. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2y^2x^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(a) Verifique que a função g é contínua em $(0, 0)$.

Solução: A função será contínua no ponto $(0, 0)$ se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = g(0, 0) = 0.$$

Como para $(x, y) \neq (0, 0)$ se tem

$$\left| \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{2x^2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2x^2 \underset{x,y\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$ e que a função é por isso contínua em $(0, 0)$.

(b) Determine $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y)$, para qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$.

Solução: Qualquer ponto $(x, y) \neq (0, 0)$ está contido numa bola onde a função está definida pelo primeiro ramo, sendo nesses pontos diferenciável (quociente de polinómios com denominador não nulo). As derivadas parciais podem ser calculadas usando as regras usuais de derivaçãoe , em particular,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{(2x^2y^2)'_y \cdot (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)'_y \cdot 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^2y(x^2 + y^2) - 4y^3x^2}{(x^t2 + y^2)^2} = \frac{4yx^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

(c) Calcule a derivada segundo o vetor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$, no ponto $(0,0)$.

Solução: Se $(x,y) = (0,0)$, a derivada direcional deve ser calculada recorrendo à definição:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(hv_1, hv_2) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^2v_1^2h^2v_2^2}{h^2v_1^2+h^2v_2^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h^2v_1^2v_2^2}{h(v_1^2+v_2^2)} = 0.$$

5. Seja $g(u,v)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com valores em $\mathbb{R}$, tal que $\frac{\partial g}{\partial u}(1,-1) = \frac{\partial g}{\partial v}(1,-1) = 1$ e seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $G(x,y,z) = g(zy^2 + \cos x, -\cos z + 2x + y^2)$. Calcule $\frac{\partial G}{\partial x}(0,0,0)$.

Solução: As funções $u = zy^2 + \cos x$ e $v = -\cos z + 2x + y^2$ são somas de funções polinomiais com cossenos de funções diferenciáveis, sendo por isso diferenciáveis. Como a função g é também diferenciável, concluímos que $G(x,y,z) = g(zy^2 + \cos x, -\cos z + x^2 + y^2)$, sendo composição de funções diferenciáveis, é diferenciável. Além disso, vemos que quando $x = y = z = 0$ se tem $u = 1$ e $v = -1$. Assim, podemos aplicar a regra da cadeia, obtendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x}(0,0,0) =& \frac{\partial g}{\partial u}(1,-1)\frac{\partial u}{\partial x}(0,0,0) + \frac{\partial g}{\partial v}(1,-1)\frac{\partial v}{\partial x}(0,0,0)\\ =& 1 \times (-\sin x)_{|(x,y,z)=(0,0,0)} + 1 \times 2_{|(x,y,z)=(0,0,0)}\\ =& 1 \times 0 + 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$